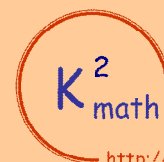
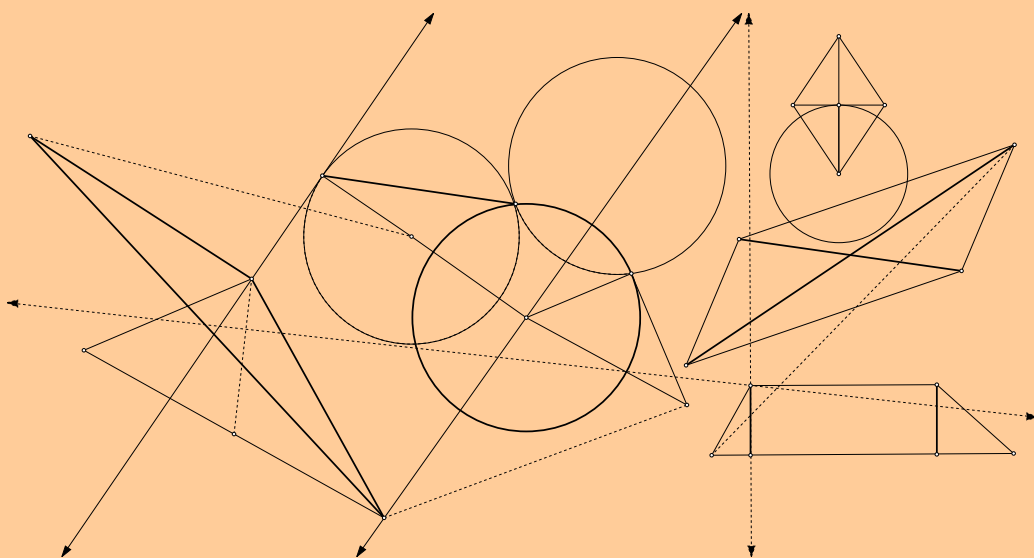




Τάξη Α

Μάθημα: Γεωμετρία

- ✓ Η Θεωρία σε Ερωτήσεις
- ✓ Ερωτήσεις Κατανόησης
- ✓ Επαναληπτικά Θέματα
- ✓ Επαναληπτικά Διαγωνίσματα



Περιεχόμενα

Τρίγωνα

A. Θεωρία-Αποδείξεις.....	Σελ.2
B. Θεωρία-Ορισμοί.....	Σελ.9
Γ. Ερωτήσεις Σωστού -Λάθους.....	Σελ.12

Παράλληλες Ευθείες

A. Θεωρία-Αποδείξεις.....	Σελ.14
B. Θεωρία-Ορισμοί.....	Σελ.16
Γ. Ερωτήσεις Σωστού -Λάθους.....	Σελ.17

Παραλληλόγραμμα -Τραπέζια

A. Θεωρία-Αποδείξεις.....	Σελ.19
B. Θεωρία-Ορισμοί.....	Σελ.26
Γ. Ερωτήσεις Σωστού -Λάθους.....	Σελ.28

Επαναληπτικά Θέματα ΕξετάσεωνΣελ.29

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα.....Σελ.34

Τρίγωνα

A. Θεωρία-Αποδείξεις

1. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο να αποδείξετε ότι:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

3. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντιστρόφως, κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απάντηση:

4. Να αποδείξετε ότι , αν δυο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα , τότε και οι χορδές τους είναι ίσες

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

5. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου , που αντιστοιχεί στη βάση του , είναι διχοτόμος και ύψος.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Να αποδείξετε ότι ,αν οι χορδές δυο τόξων ενός κύκλου , μικρότερων του ημικυκλίου , είναι ίσες τότε τα τόξα είναι ίσα.

Απάντηση:

7. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας των ορθογώνιων τριγώνων
Απάντηση:

8. Να αποδείξετε η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Να αποδείξετε ότι δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....
.....
.....

12. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απάντηση:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

13. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δυο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απάντηση:

B. Θεωρία - Ορισμοί

1. Πότε ένα τρίγωνο λέγεται σκαληνό ,πότε ισοσκελές και πότε ισόπλευρο;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Πότε ένα τρίγωνο λέγεται οξυγώνιο ,πότε ορθογώνιο και πότε αμβλυγώνιο;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Τι λέγεται διάμεσος ενός τριγώνου;

Απάντηση:

.....

.....

4. Τι λέγεται διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου;

Απάντηση:

.....

.....

5. Τι λέγεται ύψος ενός τριγώνου;

Απάντηση:

.....

.....

6. Πότε δυο τρίγωνα λέγονται ίσα;

Απάντηση:

.....

.....

.....

7. Τι λέγεται διάκεντρος δυο κύκλων;

Απάντηση:

.....

.....

8. Πότε μια ευθεία και ένας κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία, πότε έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, και πότε έχουν δυο κοινά σημεία;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

9. Πότε ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (K, R) και πότε οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) βρίσκονται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου;

Απάντηση:

.....

.....

10. Πότε δυο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και πότε εφάπτονται εξωτερικά;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

11. Πότε δυο κύκλοι τέμνονται; Τι λέγεται κοινή χορδή;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

12. Τι λέγεται γεωμετρικός τόπος;

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν ίση απόσταση από ένα σταθερό σημείο;

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός τμήματος;

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Γ. Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
2. Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία
3. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
4. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μικρότερη από καθεμιά από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
5. Το άθροισμα δυο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .
6. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία
7. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δυο άλλων και μικρότερη από τη διαφορά τους.
8. Αν ένα τρίγωνο έχει δυο γωνίες ίσες , τότε είναι ισοσκελές.
9. Κάθε χορδή κύκλου είναι μεγαλύτερη ή ίση της διαμέτρου.
10. Αν δυο πλάγια τμήματα είναι ίσα ,τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.
11. Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δυο πλάγια τμήματα τότε το κάθετο τμήμα είναι μεγαλύτερο από κάθε πλάγιο.
12. Αν P είναι είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου τότε η διακεντρική ευθεία του είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής.
13. Αν P είναι είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου τότε η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων τμημάτων και τη γωνία των

ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής

14. Όταν δυο τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι , τότε η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
15. Το σημείο επαφής δυο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Παράλληλες Ευθείες

A. Θεωρία- Αποδείξεις

1. Να αποδείξετε ότι αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δυο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ,τότε είναι παράλληλες.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

2. Να αποδείξετε ότι, αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Να αποδείξετε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο ,το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

4. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο , το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Να αποδείξετε ότι δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

B. Θεωρία - Ορισμοί

1. Πότε δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 λέγονται παράλληλες;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

2. Τι λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος; Πως βρίσκουμε το κέντρο του και πως λέγεται;

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

3. Τι λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος; Πως βρίσκουμε το κέντρο του και πως λέγεται;

Απάντηση:

.....

.....

.....

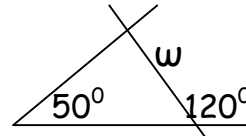
.....

Γ. Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

1. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μια μόνο παράλληλη προς αυτή.
2. Αν δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και μια τρίτη ευθεία ϵ τέμνει τη μια από αυτές, τότε θα τέμνει και την άλλη.
3. Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
4. Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μια προς μια, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.
5. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
6. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι παραπληρωματικές
7. Δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι παραπληρωματικές.
8. Δυο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
9. Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μια είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.
10. Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°
11. Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.
12. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου είναι $2n-4$ ορθές

13. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2 ορθές.
14. Αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.
15. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.



16. Στο διπλανό σχήμα η γωνία ω είναι $\omega=70^\circ$
17. Οι διχοτόμοι δυο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
18. Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.
19. Δυο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
20. Η γωνία δυο εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου είναι ίση με $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια

A. Θεωρία- Αποδείξεις

1. Σε κάθε παραλληλόγραμμο να αποδείξετε ότι:
- α. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες
 - β. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες
 - γ. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες
 - β. Δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες
 - γ. Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες

δ. Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απάντηση:

.....

.....

.....

4. Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο , αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Να αποδείξετε ότι

α. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.

β. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της .

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Να αποδείξετε ότι , αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Να αποδείξετε ότι , αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτεινουσας και αντίστροφα.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Αντίστροφα:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Να αποδείξετε ότι , η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. Να αποδείξετε ότι , αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές , τότε:

α. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.

β. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

Απάντηση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. Εφαρμογή: Να αποδείξετε ότι ,σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο ,

α. αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δυο ισοσκελή τρίγωνα.

β. Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απάντηση:

B. Θεωρία - Ορισμοί

1. Να δώσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

2. Να δώσετε τον ορισμό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

3. Να δώσετε τον ορισμό του ρόμβου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

4. Να δώσετε τον ορισμό του τετραγώνου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

5. Να δώσετε τον ορισμό του τραπεζίου.

Απάντηση:

.....

.....

.....

6. Να δώσετε τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου.

Απάντηση:

.....

.....

7. Τι λέγεται διάμεσος τραπεζίου;

Απάντηση:

.....

.....

8. Τι λέγεται ορθόκεντρο τριγώνου;

Απάντηση:

.....

.....

.....

9. Τι λέγεται βαρύκεντρο τριγώνου;

Απάντηση:

.....

.....

.....

10. Τι λέγεται έγκεντρο τριγώνου; Τι λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος;

Απάντηση:

.....

.....

.....

11. Τι λέγεται περίκεντρο τριγώνου; Τι λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος;

Απάντηση:

.....

.....

Γ. Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
2. Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.
3. Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δυο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.
4. Οι διαγώνιοι του ορθογώνιου τέμνονται κάθετα.
5. Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν είναι παραλληλόγραμμο και έχει όλες τις γωνίες του ίσες.
6. Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.
7. Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες.
8. Ένας ρόμβος με μια ορθή γωνία είναι τετράγωνο.
9. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
10. Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες
11. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
12. Η απόσταση της κάθε κορυφής τριγώνου από το βαρύκεντρο είναι το $\frac{1}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.
13. Στο ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.
14. Η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Επαναληπτικά Θέματα Εξετάσεων

1. Α. Να αποδειχθεί ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινούς.

Β. Κυκλώστε την σωστή απάντηση:

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξωτερική γωνία της \hat{A} είναι ίση με:

1. $\hat{B}-\hat{\Gamma}$ 2. $\hat{B}+\hat{\Gamma}$ 3. $2(\hat{B}+\hat{\Gamma})$ 4. $\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{\Gamma})$ 5. Κανένα από τα προηγούμενα

Γ. Χαρακτηρίστε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας την κατάλληλη ένδειξη Σ για το σωστό Λ για το λάθος:

- α) Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες
- β) Οι απέναντι γωνίες ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίσες.
- γ) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.
- δ) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του.
- ε) Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν E, Z είναι οι προβολές των κορυφών A, Γ στην διαγώνιο $B\Delta$ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι:

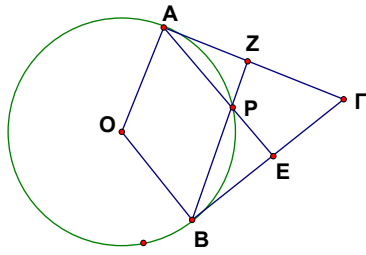
α) $AE=\Gamma Z$ β) Η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα EZ .

3. Δίνεται κύκλος (O,R) μία διάμετρος του AB και χορδή $B\Gamma=R$. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει την ευθεία AB στο Δ :

- α) Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta=B\Gamma$) με $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=45^\circ$. Έστω EZ η διάμεσος του και AH το ύψος του. Από το Z φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$ που τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο Θ . Να δειχθεί ότι $\hat{\Theta Z\Gamma}=\hat{H\epsilon\Delta}=90^\circ$.

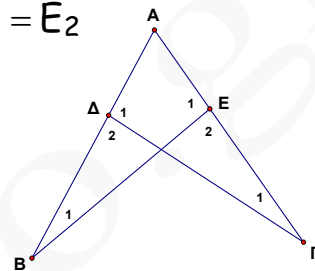
5. Δίνεται ο κύκλος (O, ρ) , ένα τόξο $AB=120^\circ$ και ένα εσωτερικό σημείο P του τόξου αυτού. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο Γ . Αν η ημιευθεία AP τέμνει την $B\Gamma$ στο E και η ημιευθεία BP τέμνει την $A\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:



- α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
β) Τα τρίγωνα AEB και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

6. Στο διπλανό σχήμα είναι $BE=\Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_2$
Να δείξετε ότι:

- α) $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$
β) $\text{Τριγ. } ABE = \text{Τριγ. } A\Delta\Gamma$
γ) Το τρίγωνο $\hat{A}B\Gamma$ είναι ισοσκελές.



7. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με M μέσο της AB , προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του B κατά τμήμα $B\Delta = \frac{AB}{2}$. Αν E είναι το μέσον της $A\Gamma$ και η $B\Gamma$ τέμνει την ΔE στο K , να δείξετε ότι:

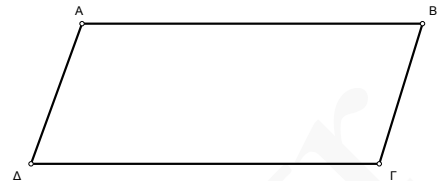
- α) Το K είναι μέσον της ΔE . β) $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.

8. Α. Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες.
Β.. Να απαντήσετε αν είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις.
1. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα.
 2. Δυο γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι πάντα ίσες.
 3. Το τετράγωνο είναι ρόμβος.
 4. Δυο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
 5. Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή και μια εφαπτομένη στο άκρο της χορδής είναι ίση με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής.
- Γ. Στην παρακάτω ερώτηση επιλέξτε τη σωστή απάντηση.
Το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου λέγεται:
- α. Ορθόκεντρο β. Βαρύκεντρο γ. Έκκεντρο δ. Περίκεντρο

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $BE, \Gamma Z$ ύψη που τέμνονται στο H .
- Να δείξετε ότι $AZ=AE$.
 - Να δείξετε ότι η AH είναι διχοτόμος της γωνίας A .
 - Αν M μέσο της $A\Gamma$ να δείξετε ότι το τρίγωνο AMZ είναι ισοσκελές.

10. Αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με $AB=2B\Gamma$ και M μέσο της $\Gamma\Delta$.

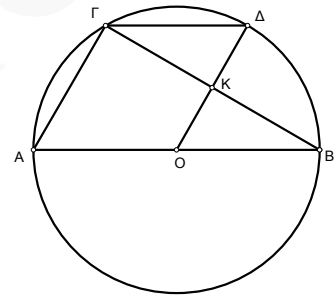
- Να δείξετε ότι οι AM και BM είναι οι διχοτόμοι των γωνιών A και B του παραλληλογράμμου.



- Να δείξετε ότι η γωνία $\hat{A}MB$ είναι ορθή.

11. Α. Δίνεται κύκλος (O,R) , μια διάμετρος AB και χορδή $A\Gamma=R$. Φέρνουμε OK κάθετη στη $B\Gamma$ που η προέκτασή της τέμνει τον κύκλο στο Δ .

- Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{A}B\Gamma$.
- Να δείξετε ότι $A\Gamma=2OK$
- Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AO\Delta\Gamma$ είναι ρόμβος.



12. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την βάση $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $BE = \Gamma Z$. Να αποδειχθεί ότι:

- $AE = AZ$
- Τα σημεία B, Γ ισαπέχουν από τις πλευρές AE και AZ αντίστοιχα.

13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Η AI είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .
- Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$.

14. Α. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $M\Gamma\Delta$ και ABM είναι ίσα.

- Β. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) η εξωτερική γωνία της B

είναι $B_{εξ} = 115^\circ$. Να βρεθεί η γωνία \hat{A} .

15. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ και ΔA τα σημεία K , Λ , M και N αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

α) $K\Lambda = MN$

β) Το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και M το μέσο της AB . Οι προεκτάσεις των ΓM και ΔA τέμνονται στο σημείο E .

Να δείξετε ότι: α) $A\Delta = AE$ β) $\Delta M \perp E\Gamma$

17. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Delta\Gamma$.

18. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές.

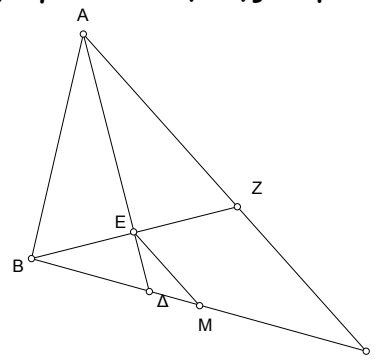
19. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε την $B\epsilon$ κάθετη στην $A\Delta$ που η προέκτασή της τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

β) $Z\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.

γ) $EM \parallel A\Gamma$.

δ) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$.



20. Σε σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο $A\Delta$ και την προεκτείνουμε προς το μέρος του Δ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Στη συνέχεια φέρουμε το ύψος AH και το προεκτείνουμε προς το μέρος του H κατά τμήμα $HZ = AH$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A}\Gamma B = \hat{B}\Gamma Z$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΔΓ είναι ίσα.

γ) Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΖ, τότε το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

21. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B}=60^{\circ}$ και ΒΚ η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} του παραλληλογράμμου, όπου Κ το σημείο τομής της διχοτόμου με την πλευρά ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες \hat{A} , $\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου.β) Αν Μ το μέσο της ΒΚ, να δείξετε ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} του παραλληλογράμμου.γ) Να δείξετε ότι $AM = \frac{\Gamma\Delta}{2}$

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα**1^ο Διαγώνισμα****ΘΕΜΑ 1^ο**

- A.** Να δείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
- i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
 - ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- 10 μον
- B.** Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο διαφορετικών ευθειών στο επίπεδο;
- 5 μον
- Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*
1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες τότε είναι ίσα.
 2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο κάθε διχοτόμος του είναι και διάμεσός του.
 3. Ένα σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , αν και μόνο αν $MA=MB$.
 4. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 5. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο 5×2= 10 μον.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$.
 Προεκτείνετε τις πλευρές του BA και ΓA κατά
 τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα με
 $A\Delta=A\epsilon$ και $A\Delta < AB$.

Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\epsilon$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

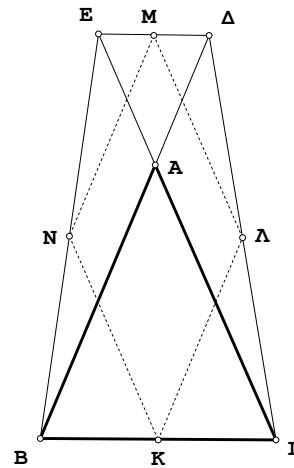
8 μον

β) Το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta\epsilon$ είναι ισοσκελές
 τραπέζιο.

8 μον

γ) Αν K, Λ, M, N είναι τα μέσα των $B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta\epsilon$ και ϵB
 αντίστοιχα τότε το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

9 μον

**ΘΕΜΑ 3^ο**

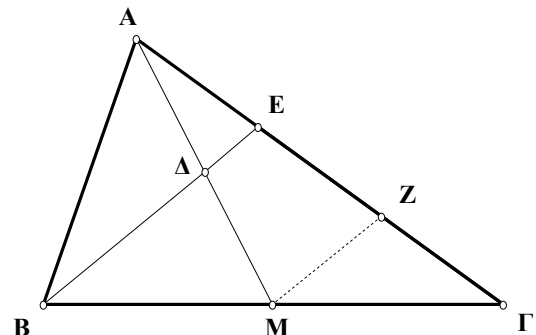
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου AM είναι η
 διάμεσός του και Δ είναι το μέσο του AM
 Φέρνουμε την $B\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο
 E και Z είναι το μέσο του $\epsilon\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι: $A\epsilon = EZ$

12 μον

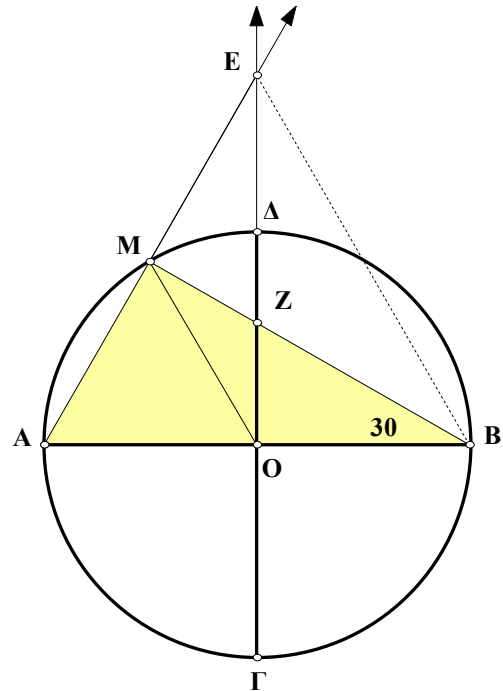
β) Να δείξετε ότι: $\Delta\epsilon = \frac{1}{4} B\epsilon$.

13 μον



ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και δύο κάθετες διαμέτροί του AB και $\Gamma\Delta$. Αν M είναι σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{ABM} = 30^\circ$ και η AM τέμνει την προέκταση της $\Gamma\Delta$ στο E , ενώ Z είναι το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BM , να δείξετε ότι:



α) Η γωνία BAM είναι 60°

7 μον

β) Το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.

9 μον

γ) $OZ = \frac{1}{3} MB$

9 μον

2^ο Διαγώνισμα**ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Να δείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας.

2,5 μον

B. α) Δώστε τον ορισμό του ρόμβου.

2,5 μον

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες τότε είναι ίσα
2. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι πάντα ίσες.
3. Το περίκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.
4. Η διάμεσος του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων του.

4X2,5= 10 μον

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Προεκτείνετε τη διάμεσο AM του τριγώνου προς το μέρος του M κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να δείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma\Delta$ 10 μον

β) τα A και Δ ισαπέχουν από την $B\Gamma$.

15 μον

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος και E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

α) Δείξτε ότι το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

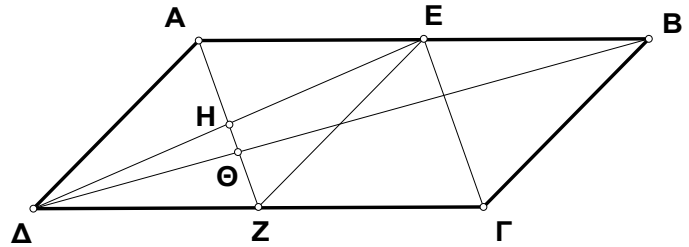
8 μον

β) Να δείξετε ότι η AZ διέρχεται από το μέσο H της ΔE .

8 μον

γ) Αν η AZ τέμνει την διαγώνιο $B\Delta$ στο Θ δείξτε ότι $\Delta\Theta = \frac{1}{2}\Theta B$

9 μον

**ΘΕΜΑ 4^ο**

Οι κύκλοι με κέντρα K και Λ του διπλανού σχήματος τέμνονται στα σημεία A και B και $A\Gamma, A\Delta$ είναι διάμετροι των κύκλων από το A .

α) Να δείξετε ότι τα σημεία Γ, B, Δ είναι συνευθειακά.

8 μον

β) Αν M, N είναι τα μέσα των ΓB και $B\Delta$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda N M$ είναι ορθογώνιο.

8 μον

γ) Αν επιπλέον P, Σ είναι τα μέσα των ακτίνων $K\Gamma$ και $\Lambda\Delta$ να αποδείξετε ότι $P\Sigma = \frac{3}{2} K\Lambda$.

9 μον

